問題

n を自然数とする。半径 1 の円に互いに重なり合わないように半径 $\dfrac{1}{n}$ の円を外接させる。

このとき外接する円の最大個数を a_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ。

（1957 東京工業大学）

現在でもいろいろな問題集で見かける有名問題です。

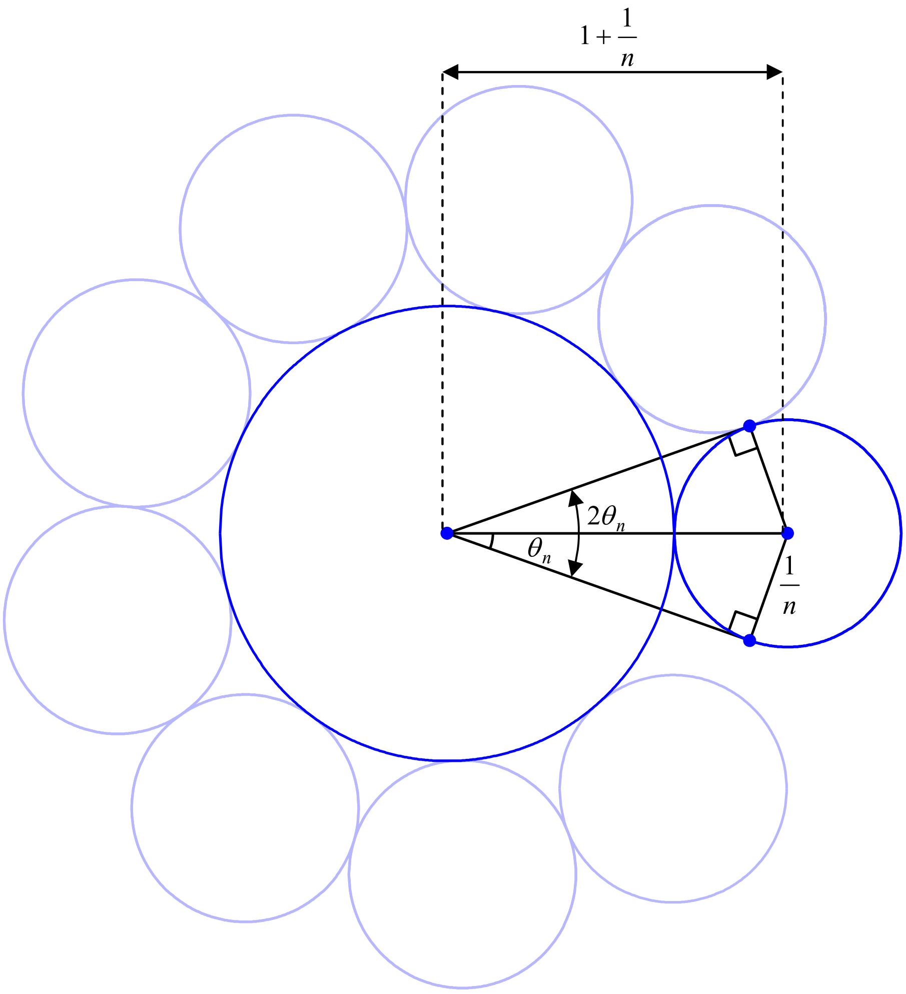
初めて解く人へ

大学への数学「新数学演習」での難易度と目標解答時間は C***となっております。

難易度：A（易）～D（難）

解答目標時間：*1 個につき 10 分以内

解答と解説



x を実数とし，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表すと，

題意および上図より，$a_n=\left[\dfrac{2\pi}{2\theta_n}\right]=\left[\dfrac{\pi}{\theta_n}\right]$

よって，$a_n\leq\dfrac{\pi}{\theta_n}<a_n+1$　$\therefore\dfrac{\pi}{\theta_n}-1<a_n\leq\dfrac{\pi}{\theta_n}$

よって，$\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\pi}{\theta_n}-1\right)<\dfrac{a_n}{n}\leq\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\pi}{\theta_n}$　$\therefore\pi\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{\theta_n}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{a_n}{n}\leq\pi\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{\theta_n}$

ここで上図より，$\dfrac{1}{n}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\theta_n$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\theta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\theta_n\cdot\frac{1}{\theta_n}\right\}$$

これと $n \to \infty$ のとき，$\theta_n \to 0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\theta_n\cdot\frac{1}{\theta_n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{\theta_n\to 0}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}$$
$$=1\cdot 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\theta_n}\right)=1$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\pi\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\theta_n}-\frac{1}{n}\right)=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\theta_n}-\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$
$$=\pi\cdot 1-\pi\cdot 0$$
$$=\pi$$

同様に，$\lim_{n\to\infty}\left(\pi\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\theta_n}\right)=\pi$

よって，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\pi \quad \cdots(答)$$